Las matemáticas en la equivalencia "Core-Walras"

Carlos Hervés-Beloso
RGEA. Facultad de Económicas. Universidad de Vigo.
e-mail: cherves@uvigo.es
http://webs.uvigo.es/cherves

1 Introducción

¿Como se reparte la tarta de cumpleaños entre el conjunto de invitados?

Si la tarta tiene partes con chocolate, con nata, con fresa y con vainilla, y unos prefieren el chocolate y otros la fresa o la nata o la vainilla, es evidente que la división en partes iguales no es eficiente; esto es, teniendo en cuenta las preferencias de cada uno, es posible encontrar otro reparto que convenga más a todos los invitados.

También puede ocurrir, complicando el problema, que no todos los invitados tengan los mismos derechos sobre la tarta, que unos tengan derecho a ración doble y otros no. El problema es esencialmente el mismo que el que afrontan distintos agentes que se reúnen para intercambiar sus respectivos productos. Uno aporta legumbres, otro pan, otros aportan leche, huevos, vino, distintos tipos de frutas, etc. La tarta la forma el conjunto de todos estos productos, que no son homogéneos y al que cada uno contribuye en su propia medida.

La solución buscada dependerá de las preferencias de los participantes y de los recursos (o derechos) aportados por cada uno sobre el conjunto de la tarta. Dependerá también de las propiedades que sean deseables para el reparto resultante. Estas propiedades pueden ser de diversa índole. Por ejemplo, si a un

agente le corresponde una asignación que es peor para él que lo que él aportó, ese reparto no sería *racional* para ese agente. Si dos agentes aportan lo mismo y uno prefiere la asignación que corresponde al otro más que la que le corresponde a él, ese reparto no estaría *libre de envidia*. Si existe un reparto alternativo en el que todos los agentes están mejor, el reparto propuesto no es *óptimo de Pareto* (no es *eficiente*). Si un subconjunto de los agentes (una *coalición*) puede repartirse sus propias aportaciones de forma que todos estén mejor que con el reparto propuesto, diremos que el reparto *está vetado* por esa coalición.

El reparto podría ser el propuesto por un planificador central que, bienintencionado, trata de asignar a cada uno lo que estima que más le conviene. Pero nada garantiza que la propuesta sea individualmente racional, que esté libre de envidia, que sea óptimo de Pareto o que no esté vetado por alguna coalición de agentes (un reparto que no está vetado por ninguna coalición es individualmente racional, al no estar vetado por las coaliciones formadas por un individuo, y es óptimo de Pareto, por no estar vetado por la coalición formada por todos).

La solución satisfactoria del problema tiene su origen en la obra *"An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations" (1776)* [1] de Adam Smith, quien sugiere la existencia de una *mano invisible* que establece los precios unitarios de cada mercancía. Según esos precios, cada agente tiene como renta el valor de lo que aporta y elige el trozo de la tarta que más le gusta entre todos aquellos que puede pagar con su renta.

Estas ideas de Adam Smith fueron recogidas y sistematizadas un siglo más tarde por Léon Walras [2] quien, en su obra *"Éléments d'économie politique pure, ou théorie de la richesse sociale" (1874)*, intentó demostrar la existencia de un sistema de precios que vacía el mercado; esto significa que si los agentes maximizan sus preferencias eligiendo el trozo de tarta que prefieren entre los que pueden pagar, resulta un reparto factible. Walras, utilizando los instrumentos matemáticos disponibles en su tiempo, no pudo conseguir una demostración rigurosa de la existencia de tal sistema de precios. Ochenta años más tarde, una vez que la teoría de juegos había comenzado a desarrollarse y siguiendo, en particular, las ideas de John Nash, los también posteriormente premios Nobel de economía Keneth J. Arrow y Gerard Debreu (1954) demostraron rigurosamente la existencia de un *equilibrio*.

[1] http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=La_riqueza_de_las_naciones&oldid=29214145
[2] http://fr.wikipedia.org/wiki/L%C3%A9on_Walras

Una *economía de intercambio* es una especificación de un conjunto de agentes, caracterizados por sus preferencias y por sus recursos o aportaciones iniciales. La tarta es la suma de los recursos iniciales de todos los agentes. Una asignación (un reparto) de la economía es una especificación de lo que corresponde a cada agente. El *núcleo de la economía* está formado por las asignaciones factibles que no están vetadas por ninguna coalición de agentes. Un equilibrio de la economía consiste en un sistema de precios y una asignación factible, de modo que lo que corresponde a cada agente en la asignación de equilibrio maximiza sus preferencias dentro de su conjunto presupuestario.

Un reparto de equilibrio soluciona satisfactoriamente el problema pues es racional, está libre de envidias entre agentes con los mismos recursos y es eficiente (de hecho está en el núcleo de la economía).

En este artículo nos centramos en la relación entre el concepto descentralizado de equilibrio walrasiano y el concepto cooperativo del núcleo de la economía. El concepto de equilibrio supone que las fuerzas del mercado determinan un sistema de precios y los agentes, tomando los precios como dados, intercambian sus recursos de acuerdo con esos precios. Implícitamente, que los agentes actúen como precio aceptantes, presupone que se trata de un número grande de agentes y que por ello ninguno puede influir en los precios. Por su parte, el concepto de núcleo ignora los precios, es aplicable a cualquier mercado con pocos o muchos consumidores y sólo se basa en el intercambio directo entre grupos o coaliciones de agentes.

En las siguientes secciones analizaremos como el poder del veto permite obtener la "equivalencia Core-Walras", que es piedra angular de la relación ente el comprtamiento cooperativo y el descentarlizado, poniendo de manifiesto el poder del mecanismo del veto.

2 Notación y definiciones

Consideraremos una economía $\mathcal{E}$ en la que interviene un conjunto I de agentes (cuyos elementos denotaremos por t) que intercambian un conjunto k de mercancías perfectamente divisibles. Un sistema de precios p especifica el precio unitario de cada mercancía y es por tanto un vector $\mathbb{R}^k$.

Supondremos que el conjunto de consumo de todos los agentes es el ortante

positivo del espacio euclideo $\mathbb{R}^k$. Cada consumidor t está caracterizado por su relación de preferencia $\preceq_t$ y por sus recursos iniciales $\omega(t) \in \mathbb{R}^k_+$.

Una asignación o un reparto x especifica un vector o plan de consumo $x(t)$ para cada consumidor t. Una asignación x es factible si $\int_I x(t) \leq \int_I \omega(t)$.[3]

Un equilibrio de la economía $\mathcal{E}$ es un par (x, p) tal que (1) x es una asignación factible y p un sistema de precios, (2) $px(t) \leq p\omega(t)$, y (3) $y \succ x(t)$ implica $py > pw(t)$. Las condiciones (2) y (3) han de cumplirse para todo t. [4]

Las herramientas matemáticas necesarias en la demostración de la existencia de equilibrio en una economía de intercambio son las mismas que en el caso general de economías con producción. En el caso de un número finito m de agentes, basta con suponer convexidad, monotonía y continuidad en las preferencias y que todos los agentes tengan riqueza positiva. Así se prueba que la demanda, a precios p, de cada agente (los consumos que maximizan sus preferencias en su conjunto presupuestario) es una correspondencia continua superiormente. Se considera un agente adicional, el mercado, cuya correspondencia de demanda consiste en el conjunto de precios que maximizan el valor del exceso de demanda global. Con esto se consigue que se igualen la oferta y la demanda agregadas. El equilibrio (x, p) se obtiene como un punto fijo de la correspondencia producto de las $m + 1$ correspondencias de demanda.

Por otra parte, suponiendo diferenciabilidad y como consecuencia del teorema de Sard, se obtiene la existencia genérica del equilibrio, respecto de los recursos iniciales. La unicidad local del equilibrio o si se prefiere el número de equilibrios (finito, en economías regulares) se obtiene mediante el teorema de Poincaré-Hopf que permite concluir que los equilibrios de una economía regular son un número impar.

Una coalición de agentes S es cualquier subconjunto de I, medible y de medida positiva.

Una asignación x está vetada por una coalición S si existe otra asignación y tal que (i) $\int_S y(t) \leq \int_S \omega(t)$ y (ii) $y(t) \succ_t x(t)$ para todo $t \in S$. El núcleo de la economía $\mathcal{E}$ es el conjunto de asignaciones factibles que no están vetadas por

[3]El símbolo $\int_I$ significa suma en los elementos de I si este conjunto es finito o integral en I de la función integrando, respecto a la medida de Lebesgue, si I es un intervalo, en cuyo caso habrá que suponer que las asignaciones son funciones medibles. (Es la integral respecto a la medida de contar en un caso y respecto a la medida de Lebesgue en el otro).

[4]Excepto para un conjunto de medida nula

ninguna coalición de agentes.

Denotemos por $\mathcal{W}(\mathcal{E})$ el conjunto de las asignaciones walrasianas. Esto es, el conjunto de las asignaciones x para las que existe un sistema de precios p tal que (x, p) es equilibrio y denotemos por $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ el conjunto de asignaciones en el núcleo. De ambas definiciones se deduce facilmente el denominado ***primer teorema del bienestar***; $\mathcal{W}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{E})$.

En efecto, sea x una asignación walrasiana y supongamos que está vetada por una coalición S. Existirá una asignación y cumpliendo los requisitos (i) y (ii); por tanto, dado que y cumple (ii) y x es de equilibrio $py > pw(t)$ para (casi) todo t en S. Esto implica que $\int_S py(t) > \int_S p\omega(t)$ en contradicción con la condición (i).

La interpretación de este resultado es que toda asignación de equilibrio es eficiente (Optimo de Pareto) y también lo es si se la restinge a la subeconomía resultante de considerar solamente a los agentes de cualquier coalición S.

3 La conjetura de Edgeworth: Equivalencia entre el núcleo y las asignaciones de equilibrio

Edgeworth (1881) conjeturó (para el caso de un mercado con dos mercancías) que conforme el número de agentes se incrementa, la curva de contrato (concepto precursor del núcleo) se contrae hasta el punto de equilibrio.

La primera formulación rigurosa de esta conjetura, al tiempo que una respuesta positiva a la misma, se debe al elegante artículo de G. Debreu y H. Scarf (1963), en el que se considera una economía de intercambio con cuaquier número finito m de agentes y cualquier número k de mercancías. El incremento del número de agentes se modeliza replicando la economía. La r-replica de ésta economía es otra economía en la que actúan mr agentes; r agentes iguales a cada uno de los m agentes de la economía inicial (caracterizados por el mismo conjunto de consumo, preferencias y dotaciones iniciales).

Las hipótesis del modelo de Debreu-Scarf [5] garantizan la existencia de equilibrio y, con ello la existencia de asignaciones en el núcleo de cualquier economía replica. Los núcleos de las distintas replicas son objetos no homegéneos. En

[5] Las preferencias de cada agente son transitivas, completas, monótonas, convexas y continuas y los recursos iniciales son estrictamente positivos

efecto, mientras que un elemento del núcleo de la r-replica consiste en un plan de consumo para cada uno de los mr consumidores, y es por tanto un vector en el espacio $\mathbb{R}^{mr}$, un elemento del núcleo de la $(r+p)$-replica es un vector del espacio $\mathbb{R}^{m(r+p)}$. Sin embargo, la hipóteis de estricta convexidad de las preferencias garantiza la propiedad de igual tratamiento lo que significa que, en el núcleo, agentes iguales reciben la misma asignación. Esta propiedad permite identificar los vectores del núcleo de cualquier réplica con asignaciones de la economía inicial.

Por otra parte es fácil ver que los núcleos son conjuntos compactos y que, con esta identificación, el núcleo de la economía inicial contiene al de la r-replica y este al de la $(r+p)$-replica. Por tanto, la intersección de estos conjuntos es no vacía. Eligiendo un elemento x de esta intersección se prueba, mediante el teorema de separación de conjuntos convexos, que existe un sistema de precios p que descentralza a la asignación x; esto es (x, p) es un equilibrio walarasiano de la economía inicial.

Por su parte, el también premio Nobel de Economía, Robert Aumann, en uno de sus artículos más celebrados, "Markets with a continuum of traders" (Econometrica, 1964) sugiere que el modelo matemático mas natural para un mercado con competencia perfecta ha de considerar un continuo de agentes (el intervalo $[0, 1]$ por ejemplo) y usar la integral de Lebesgue para representar el agregado. De este modo se hace patente que un cambio en el comportamiento de un agente es irrelevante en el modelo.

Aumann muestra el poder y simplicidad de éste método para describir fenómenos de masas en economía y en teoría de juegos. Define las coaliciones como conjuntos medibles de medida de Lebesgue positiva y relaja las hipóteis de Debreu y Scarf permitiendo que las preferencias de los consumidores no tengan que ser transitivas o completas y ni siquiera convexas (gracias al efecto convexificador de la integral). Usando herramientas de la teoría de la medida y de los espacios de Banach (la integral de Riemann no es es una alternativa), y una técnica similar a la de Debreu y Scarf, demuestra que en el modelo continuo las asignaciones de equilibrio y el núcleo coinciden.[6]

En la siguiente sección veremos que también en economías con un número finito de agentes puede conseguirse la equivalencia exacta si se potencian las

[6]Ver el reciente "survey" de Anderson (2008) sobre el núcleo
http://www.dictionaryofeconomics.com/article?id=pde2008_C000554

posibilidades de veto.

4 El Núcleo de Aubin y el Equilibrio

En el caso de economías con un número finito de agentes, Aubin (1979) introdujo un concepto de veto en el que los agentes pueden participar en las coaliciones con una parte de sus recursos. La parte del total de los recursos con la que un agente participa en una coalición se determina mediante un coeficiente o ponderación que varía entre cero y uno, correspondiendo el coeficiente uno a la participación total y el coeficiente cero a la no participación en la coalición. Evidentemente, este mecanismo de veto extiende la noción de veto ordinario, que se corresponde con el veto de Aubin cuando el coeficiente de la ponderación es uno para todos los agentes que forman la coalición.

La participación de los agentes en las coaliciones con cualquier ponderación multiplica infinitamente las posibilidades de veto. El núcleo que resulta de este mecanismo de bloqueo fue denominado en el trabajo original "Noyau Flou" y pasó a conocerse en la literatura con el término poco afortunado de Fuzzy Core o Núcleo Fuzzy. El término es desafortunado y equívoco pues fuzzy suele hacer referencia a otro tipo de concepto. Formalmente:

Definición. *Una asignación x está vetada en el sentido de Aubin por la coalicion S via la la asignación y si existen coeficientes $\alpha_t \in (0,1]$, para cada $t \in S$, tales que $\sum_{t\in S}\alpha_t y_t = \sum_{t\in S}\alpha_t\omega_t$, con $y_t \succ_t x_t$, para todo $t \in S$.*

El núcleo de Aubin de $\mathcal{E}$, que denotaremos $\mathcal{AN}(\mathcal{E})$, es el conjunto de asignaciones factibles que no pueden ser vetadas en el sentido de Aubin por ninguna coalición.

En las mismas hipótesis que Debreu-Scarf (1963), Aubin demostró la exacta coincidencia $\mathcal{AN}(\mathcal{E}) = \mathcal{W}(\mathcal{E})$.

El resultado de Aubin (1979) supone una mejora respecto al correspondiente de Debreu-Scarf que sólo proporciona la igauldad asintótica. Sin embargo, ambos conceptos están muy próximos. Baste observar que, suponiendo que las ponderaciones α_t son racionales, podemos escribirlas con un denominador común $\alpha_t = \frac{p_t}{q}$ de modo que decir que x está vetada en el sentido de Aubin por la coalición S a través del reaparto y con coeficientes α_t equivale a decir que x está vetado en la q-replica de la economía por una coalición formada por p_t agentes iguales al

agente t para cada t de la coalición S.

El siguiente resultado, (Hervés-Beloso, C; E. Moreno-García (2001)), usa la equivalencia de Aumann (1964) para poner de relieve que la coalición de todos los agentes es suficiente para vetar, con el veto de Aubin, a cualquier asignación no walrasiana. En efecto,

Teorema. *Una asignación factible x es una asignación de equilibrio en $\mathcal{E}$ si y sólo si x no está vetada en el sentido de Aubin por la coalición formada por todos los agentes.*

Demostración. A partir de la economía de m consumidores $\mathcal{E}$ construimos una economía cuyos agentes son todos los puntos del intervalo $[0,1]$ y que denotamos $\mathcal{E}_c$. Para definirla, dividimos el intervalo en m subintervalos de igual longitud. $I = [0,1] = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, where $I_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, if $i \neq n$, $I_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$. Para cada $i \in \{1, ..., m\}$ los consumidores $t \in I_i$ están caracteizados por la misma preferencia $\succeq_t = \succeq_i$ y los mismos recursos iniciales $\omega(t) = \omega_i$.

Sea $x = (x_1, \ldots, x_m)$ una asignación factible que no es de equilibrio en la economía $\mathcal{E}$. Se prueba que la asignación de igual tratamiento f definida por $f(t) = x_i$ si t está en I_i no es una asignación walrasiana en la economía continua $\mathcal{E}_c$. (Véase García-Cutrín, J., C. Hervés-Beloso (1993)). Por el resultado de Aumann (1964) sabemos que f no pertenece al núcleo de $\mathcal{E}_c$, es decir, existe una coalición S, con $\mu(S) > 0$, que veta a f.

Schmeidler (1972), usando el teorema de Liapunov relativo a la convexidad del rango de una medida vectorial sin átomos, probó que si una coalición S veta a una asignación f, cualquiera que sea ϵ positivo y menor que la medida de S, existe una coalición de medida ϵ que tambien veta a f. [7] Usando el resultado de Schmeidler, K. Vind (1972) probó que si f esta vetada, dado $0 < \epsilon < 1$ existe una coalición de medida ϵ que tambien veta a f.

Usando este resultado de Vind, la coalición S puede elegirse tal que $\mu(S) > 1 - \frac{1}{n}$, por lo que $\mu(S \bigcap Ii) > 0$, para todo $i = 1, \ldots, m$. En consecuencia, existe una asignación g tal que

(i) $\int_S g(t) \leq \int_S \omega(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu(S_i)\omega_i$ y además

(ii) $g(t) \succ_i (x_i)$ para todo $t \in S \bigcap Ii = S_i$ y para todo $i = 1, \ldots, n$.

[7] Véase también Hervés-Beloso, C. et al. (2000).

Consideremos la asignación y definida por $y(t) = y_i = \dfrac{1}{\mu(S_i)} \displaystyle\int_S g(t)$ para cada $t \in S_i$ y para cada $i = 1, \ldots, n$. Por tanto, para cada $i = 1, \ldots, n$ existen $\alpha_i = n\mu(S_i) \in (0, 1]$ e $y_i \in \mathbb{R}^k_+$ tales que

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \omega_i$ y además

(ii) $y_i \succ_i x_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

La condición de admisibilidad *(i)* se debe a la propia construcción de la asignación y mientras que *(ii)* es consecuencia de la desigualdad de Jensen, que se puede usar gracias a la convexidad de las preferencias. Hemos concluído que cualquier asignación x no walrasiana está vetada en el sentido de Aubin por la coalición de todos los agentes.

Q.E.D.

Es importante destacar que este resultado no responde a la idea de que, con el veto de Aubin, cualquier coalición S puede estar representada, asintóticamente, por la coalición total con ponderaciones que tienden a cero para los agentes que no están en S. Por el contrario, se trata de la participación "casi total" de todos en la coalición.

En efecto, si entendemos que la participación de un agente i en la "gran coalición" está próxima a la participación total cuando su ponderación α_i es próxima a la unidad ($\alpha_i > 1 - \delta$ para cualquier δ pequeño), veremos que en el teorema la participación de cada agente puede exigirse, en efecto, próxima a la total:

Dado un número positivo $\delta < 1$, en virtud del resultado de Vind podemos elegir la coalición S que veta la asignación x de manera que $\mu(S) > 1 - \dfrac{\delta}{n}$, con lo cual la ponderación $\alpha_i = n\mu(S_i) = n\mu(S \bigcap I_i) > 1 - \delta$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Agradecimientos.

El autor agradece la colaboración de la profesora Emma Moreno-García, cuya ayuda fue decisiva en la elaboración de este trabajo. También agradece las sugerencias de los profesores Carlos de Miguel y Margarita Estévez.

Referencias

Arrow K. J. and G. Debreu (1954). The Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. Econometrica, vol. XXII, 265-90

Aubin, J.P. (1979): Mathematical Methods of Game Economic Theory. North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford.

Aumann, R.J. (1964): Markets with a Continuum of Traders. Econometrica, 32, 39-50.

Debreu. G. and H. Scarf (1963): A Limit theorem on the Core of an Economy. International Economic Review, 4, 235-246.

Edgeworth, F. Y. (1881): Mathemathical Psychics: An essay on the mathematics to the moral sciences. Kegan Paul, London.

García-Cutrín, J., and C. Hervés-Beloso (1993): A Discrete Approach to Continuum Economies. Economic Theory , 3, 577-584.

Hervés-Beloso, C., Moreno-García, E., Núñez-Sanz, C. and M. Páscoa (2000): Blocking Efficacy of Small Coalitions in Myopic Economies. Journal of Economic Theory, 93, 72-86.

Hervés-Beloso, C. and E. Moreno-García (2001): The Veto Mechanism Revisited; en *Approximation, Optimization and Mathematical Economics*; p. 147-159, 2001. Marc Lassonde (Ed.). Heidelberg, New York. Physica-Verlag.

Schmeidler, D. (1972): A remark on the core of an atomless economy. Econometrica, 40, 579-580.

Vind, K. (1972): A Third Remark on the Core of an Atomless Economy. Econometrica, 40, 585-586.